

Beweis von Satz 23.2.1 Sei:  $L/K$  Radikalerweiterung.

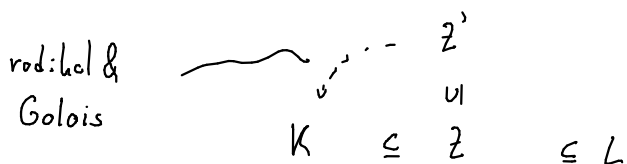
Beweis mit Induktion nach  $[L:K]$

Ind. start:  $[L:K]$  nichts zu zeigen.

Ind. schritt Sei:  $[L:K] > 1$

Wissen: es existiert Zwischenkörper  $K \subseteq Z \subseteq L$ , s.d.  $Z/K$  radikal ist, und so dass  $b \in Z$  existiert mit  $L = Z(b)$  und  $b^n \in Z$ .

Induktionssannahme: Finde Galoischer Erweiterung  $Z'/K$ , wo  $Z'$  Oberkörper von  $Z$  ist und  $Z'/K$  radikal



Wissen auch: als Galois-Erw. ist  $Z'/K$  der Zerfällungskörper eines Polynoms  $f \in K[x]$ .

Ziel  $L'$  auch als Zerfällungskörper zu konstruieren.

Betrachte dazu

$$g(x) = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(Z'/K)} (x^n - \underbrace{\sigma(b^n)}_{\in Z}) \in Z[x]$$

Ich beob. aber: wenn  $\tau \in \text{Gal}(Z'/K)$  ist, und wenn ich  $\tau$  anwende auf die Koeff. von  $g$ , dann erhalte ich

$$\prod_{\sigma \in \text{Gal}} (x^n - \tau \circ \sigma(b^n)) \stackrel{\substack{\text{gleich. Fakt, andere Reihenfolge.}}}{=} \prod_{\sigma \in \text{Gal}} (x^n - \sigma(b^n))$$

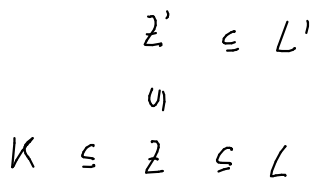
Also: Koeff. von  $g$  sind Fix unter der Wirkung von  $\text{Gal}(Z'/K)$ , also in  $K$ !

$\leadsto$  ~~ist~~ insgesamt:  $g(x) \in K[x]$

Dann definiere:  $Z'$  als Zerfällungskörper von  $f \cdot g \in K[x]$ .

Folgendes kann ich sagen:

- $Z'/K$  ist Galoisch!
- $f \cdot g$  hat  $f$  als Faktor, also ist  $Z'$  ein Oberkörper von  $Z$ .



- $Z'/K$  ist Radikalerweiterung - schauen sie sich die Nullstelle von  $g$  an!
- $b \in Z'$ , denn  $b$  ist Nullstelle von  $g$  (...  $g$  enthält Faktor  $x^n - b^n$ )!

$\leadsto$   $L'$  ist Oberkörper von  $L = Z(b)$ .

□