Beweis von Satz 23.2.1   Sei L/K Radikalerweiterung.

Beweis mit Induktion nach $[L:K]$

Ind. start: $[L:K]$ nichts zu zeigen.

Ind. schritt Sei $[L:K] > 1$

Wissen: es existiert Zwischenkörper $K \subseteq Z \subseteq L$, s.d. Z/K radikal ist, und so dass $b \in L$ existiert mit $L = Z(b)$ und $b^n \in Z$.

Induktionsannahme: Finde Galoische Erweiterung Z'/K, wo Z' Oberkörper von Z ist und Z'/K radikal

$$\begin{tikzcd} & & Z' & \\ K \arrow[urr, dashed, bend left, "\text{radikal \& Galois}"] & \subseteq & Z \arrow[u, phantom, "\cup"] & \subseteq L \end{tikzcd}$$

Wissen auch: als Galois-Erw. ist Z'/K der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[x]$.

Ziel L' auch als Zerfällungskörper zu konstruieren.

Betrachte dazu

$$g(x) = \prod_{\sigma \in Gal(Z'/K)} (x^n - \sigma(\underbrace{b^n}_{\in Z})) \in Z[x]$$

Ich beob. aber: wenn $\tau \in Gal(Z'/K)$ ist, und wenn ich τ anwende auf die Koeff. von g, dann erhalte ich

$$\prod_{\sigma \in Gal} (x^n - \tau \circ \sigma(b^n)) \overset{\text{gleiche Fakt, andere Reihenfolge}}{=} \prod_{\sigma \in Gal} (x - \sigma(b^n))$$

Also: Koeff. von g sind Fix unter der Wirkung von $Gal(Z'/K)$, also in K!

$\rightsquigarrow$ ~~ist~~ insgesamt: $g(x) \in K[x]$

Dann definiere: Z' als Zerfällungskörper von $f \cdot g \in K[x]$.

Folgendes kann ich sagen:

- Z'/K ist Galoisch!
- $f \cdot g$ hat f als Faktor, also ist Z' ein Oberkörper von Z.

$$\begin{tikzcd} & & Z' & \subseteq L' \\ K & \subseteq & Z \arrow[u, phantom, "\cup"] & \subseteq L \end{tikzcd}$$

- Z'/K ist Radikalerweiterung - schauen Sie sich die Nullstellen von g an!
- $b \in Z'$, denn b ist Nullstelle von g (.. g enthält Faktor $x^n - b^n$)!

$\rightsquigarrow$ L' ist Oberkörper von $L = Z(b)$.

$\square$