Beweis von Satz 23.0.1: Polynom f durch Radikale auflösbar $\Rightarrow$ Gal(f) auflösbar

(Teil I)

Sei: N der Zerfällungskörper von f. Muss zeigen: $Gal(N/K)$ auflösbar.

Wissen (Satz 23.2.1) $\exists\ L/N$ so dass L/K radikal und Galois.

Also existiert Kette $K = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = L$ und Elementen $b_i \in L_i$ s.d.

$L_{i+1} = L_i(b_{i+1})$ und Zahlen n_i s.d. $b_{i+1}^{n_{i+1}} \in L_i$

Setze $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$, wähle primitive n.te EHW in $\overline{K}$ und setze

$K' := K(\xi)$; $L' := L(\xi)$; $L_i' := L_i(\xi)$

Damit erhalte Kette

$$K = K' = L_0' \subset L_1' \subset \dots \subset L_m' = L'$$

Wissen K'/K und alle L_i'/K sind Galois. Hauptsatz der Galoistheorie: ich erhalte

Kette von normalen Untergruppen

$$Id = Gal(L'/L_m') \subset Gal(L'/L_{m-1}') \subset \dots \subset Gal(L'/K') \subset Gal(L'/K) \qquad (*)$$

Satz 23.1.3 $\quad Gal(L'/L_i') \big/ Gal(L'/L_{i+1}') = Gal(L_{i+1}'/L_i') \overset{23.1.3}{=}$ zyklisch.

Satz 22.3.1 $\quad Gal(L'/K) \big/ Gal(L'/K') = Gal(K'/K) =$ abelsch.

Insgesamt $Gal(L'/K) =$ auflösbar, (*) ist Auflösungskette

Es ist aber

$$Gal(N/K) = Gal(L/K) \big/ Gal(L/N)$$

quotient von auflösbar $\Rightarrow$ also selbst auflösbar!

$\square$