<u>Beweis von Satz 23.0.1</u> (Teil II) Sei: Gal(f) auflösbar; wenn L/K der Zerfällungskörper von f ist, dann ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ auflösbar. Nach Satz 20.1.7 existiert

Auflösungskette $\{0\} < G_m < G_{m-1} < \dots < G_0 = \mathrm{Gal}(L/K)$

s.d. G_i / G_{i+1} stets zyklisch sind.

Hauptsatz der Galoistheorie: dazu gehören Körpererweiterungen

$$L = L_m \supset L_{m-1} \supset \dots \supset L_0 = K.$$

so dass $\mathrm{Gal}(L/L_i) = G_i$ und $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/L_i) = G_i/G_{i+1}$ zyklisch.

(Idee: Satz 23.1.3 anwenden; L_{i+1} entsteht aus L_i durch Adjunktion einer Wurzel – wenn K genug EHW enthält.)

Setze also $n := [L:K]$, wähle primitive n-te EHW $\zeta \in \overline{K}$. Wir erhalten Erweiterungen

$$\begin{matrix} L(\zeta) = L_m(\zeta) \supset L_{m-1}(\zeta) \supset \dots \supset L_0(\zeta) = K(\zeta) \supset K. \\ \cup \\ L \end{matrix}$$

<u>Beob</u> Beweis ist fertig, wenn wir sehen, dass $L(\zeta)/K$ ein Radikalerw. ist.

<u>Vorüberlegung 23.3.1</u> $L_i(\zeta)/L_{i-1}$ und $L_i(\zeta)/L_{i-1}(\zeta)$ sind Galois.

<u>Vorüberlegung 23.3.2</u> Es genügt, zu zeigen, dass $\mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}(\zeta))$ zyklisch ist mit einer Ordnung, die n teilt. (... denn dann entsteht $L_i(\zeta)$ aus $L_{i-1}(\zeta)$ durch Adjunktion einer Wurzel).

Hauptsatz der Galoistheorie:

$$\mathrm{Gal}(L_i/L_{i-1}) = \mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}) \Big/ \mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_i)$$

... ich habe also surjekt. Morphismus

$$\begin{matrix} \mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}) & \xrightarrow{s} & \mathrm{Gal}(L_i/L_{i-1}) \\ \cup\!\shortmid & & \\ \mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}(\zeta)) & \dashrightarrow & \end{matrix}$$

η = Einschr. von s auf UG $\mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}(\zeta))$

<u>Bh:</u> η ist injektiv!

$\rightsquigarrow$ Falls das stimmt, sind wir fertig! Dann kann ich $\mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}(\zeta))$ als Untergr. der zykl. Gruppe $\mathrm{Gal}(L_i/L_{i-1})$ auffassen, also ist $\rightsquigarrow$ selbst zyklisch, und Gruppenord. teilt $\#\,\mathrm{Gal}(L_i/L_{i-1})$, und diese Ord. teilt n.

Sei $\varphi \in \mathrm{Gal}(L_i(\zeta)/L_{i-1}(\zeta))$ im $\ker(\eta)$. Dann gilt

- $\varphi : L_i(\zeta) \to L_i(\zeta)$ bildet ζ auf ζ ab, denn φ ist $L_{i-1}(\zeta)$-morphismus.
- $\varphi|_{L_i}$ ist die Identität, denn φ liegt im $\ker(\eta)$

$\Rightarrow$ φ ist die Identität auf $L_i(\zeta)$

$\Rightarrow$ $\ker(\eta)$ = trivial, also ist η tatsächlich injektiv! $\square$