Beweis von 3.5.4 falls a algebraisch ist. Setze: $m := [a : K]$ und $f(x) \in K[x]$ das Minimalpolynom. Schreibe $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + \ldots + \lambda_{m-1} \cdot x^{m-1} + x^m$

Beachte: $\{1, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\} \subseteq K(a)$ ist K-linear unabhängig

Setze: $V := \langle 1, a, a^2, \ldots, a^{m-1} \rangle_K \subseteq K(a)$ ist UVR der Dimension m.

Beh $V = K(a)$; dann ist $[K(a) : K] = \dim_K K(a) = \dim_K V = m$

Beob Es genügt, zu zeigen: V ist Unterkörper von $K(a)$, denn per Def. ist $K(a)$ der kleinste Körper, der a enth.

Dazu zu zeigen

1. Abg. unter Addition ($\checkmark$ denn V ist Vektorraum)
2. — " — Multiplikation
3. — " — Inversenbildung.

Zu 2 Beachte: $a^m = -\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \cdot a^i \in V$

Durch wiederholte Anwendung: $a^n \in V$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also gilt für alle Elemente $v_1, v_2 \in V$: $v_1 \cdot v_2 \in V$ $\square$

Zu ③ Sei $y \in V$, $y \neq 0$ gegeben. Wissen: $y^n \in V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\{1, y, y^2, \dots, y^m\}$ ist lin. ~~un~~abhängig. Also ist y algebraisch über K.

Sei $g(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + x^n$ das Minimalpolynom von y über K.

Beachte: $c_0 \neq 0$ (... denn sonst könnte ich in g einmal x ausklammern, erhielte Polynom von kleinerem Grad mit y als Nst.)

$$\frac{1}{y} = \frac{y^{n-1} + c_{n-1} \cdot y^{n-2} + \dots + c_1}{y\left(y^{n-1} + c_{n-1} y^{n-2} + \dots + c_1\right)}$$

$\neq 0$ denn nicht das Min.polynom

$$= \frac{y^{n-1} + c_{n-1} \cdot y^{n-2} + \dots + c_1}{-c_0} \in V.$$

$\neq 0$

$\square$