Beweis von Satz 3.6.1 falls $a := [L:K]$ und $b := [M:L]$ jeweils endlich sind

Wähle Basen

$l_1 \dots l_a$ von L als K-Vektorraum

$m_1 \dots m_b$ von M als L-Vektorraum.

Bzh $(l_i \cdot m_j)_{\substack{1 \le i \le a \\ 1 \le j \le b}}$ ist Basis von M als K-Vektorraum.

Dazu:

① Erzeugendensystem

② Lin. unabh.

zu 1 Sei ein $m \in M$. gegeben. Schreibe m als L-Linearkomb.

$$m = \sum_{j=1}^{b} \lambda_j \cdot m_j \qquad \text{wobei } \lambda_j \in L.$$

Schreibe λ_j als K-Linearkombination

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{a} \mu_{ij} \cdot l_i \qquad \text{wobei } \mu_{ij} \in K.$$

Einsetzen:

$$m = \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{j=1}^{a} \mu_{ij} \cdot l_i \right) \cdot m_j = \sum_{i,j} \mu_{ij} \left(l_i \cdot m_j \right) \qquad \square$$

Zu ② Lineare Unabhängigkeit: Sei eine K-lineare Relation gegeben,

d.h.

$$0 = \sum_{i,j} \mu_{ij} \cdot (l_i \cdot m_j) \quad \text{wobei } \mu_{ij} \in K.$$

$$= \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \mu_{ij} \cdot l_i \right)}_{\in L} \cdot m_j$$

ist L-Lineare Relation unter den m_j

$\Rightarrow \forall j: \sum_i \mu_{ij} \cdot l_i = 0$ ... ist K-lineare Relation unter den l_i

$\Rightarrow \forall j: \forall i: \mu_{ij} = 0.$

$\square$