Beweis (5.4.15.1) $\Rightarrow$ (5.4.15.2) Muss zeigen: Teilerkettensatz + irreduzible sind prim

(1) Teilerkettensatz

Beob. Gegeben Elte $r, s \in R$ mit Darstell. $r = r_1 \cdots r_n$; $s = s_1 \cdots s_m$. Falls $r \mid s$, dann folgt aus Eindt. der Darst., dass $n \leq m$. Falls $r \parallel s$ folgt sogar $n < m$.

Konseq. In einer Teilerkette $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird die Länge der Darst. immer kürzer (sogar echt kürzer, wenn $r_{n+1} \parallel r_n$ ist). Das kann aber nur endl. oft passieren. $\square$

(2) Sei $p \in R$ ein irred. Elt. Seien $a, b \in R$, so dass $p \mid (a \cdot b)$. (d.h. $\exists\, h \in R$: $p \cdot h = a \cdot b$). Schreibe h, a, b als Prod. von irred.

$h = h_1 \cdots h_n$; $a = a_1 \cdots a_m$, $b = b_1 \cdots b_k$. Dann:

$$p \cdot h_1 \cdots h_n = a_1 \cdots a_m \cdot b_1 \cdots b_k.$$ Darst. sind äquivalent!

$\Rightarrow$ recht ~~st~~ gibt es einen Faktor ($a_\bullet$, oder $b_\bullet$) der assoziiert zu p ist.

$\Rightarrow$ $p \mid a$ oder $p \mid b$. $\square$