Beweis 15.4.15.2) $\Rightarrow$ 15.4.15.1)

1) Existenz von Darstellungen

2) Eindeutigkeit.

zu ① ✓, weil der Teilerkettensatz gilt.

zu ② zu zeigen: für jedes Elt. r und jedes Paar von Darst.

$r = p_1 - p_n = q_1 - q_m$ sind die beiden Darst. äquivalent.

Beweis per Induktion nach der Länge der kürzeren Darst.

Induktionsstart (Länge 1) OE kann ich schreiben $r = p_1 = q_1 \cdots q_m$

Also: r ist irreduzibel $\Rightarrow$ $m = 1$; $r = p_1 = q_1$ $\square$

Induktionsschritt OE kann ich schreiben $r = p_1 - p_n = q_1 - q_m$ und $n \leq m$.

Betr. p_1. Das ist irred, also prim. Also: $\exists j: p_1 \mid q_j$. Also $p_1 \sim q_j$

OE $j = 1$ und ich kann schreiben $p_1 = \varepsilon \cdot q_1$ für geeig. $\varepsilon \in R^*$

Insgesamt:

$$(\varepsilon \cdot q_1)\, p_2 - p_n = q_1 q_2 - q_m$$

R ist Int.ring

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \cdot p_2 - p_n = q_2 - q_m$$

IA diese Darst. sind äquivalent

$\Rightarrow$ Darst. $p_1 p_2 - p_n = q_1 q_2 - q_m$ sind ebenfalls äquivalent.

$\square$