Konstruktion des Quotientenkörpers $Q(R)$ ... als Menge

Betr. $M = \{ (a,b) \in R \times R \mid b \neq 0 \}$. ⇝ Elte von M werden als Brüche bezeichnet.

<u>Ziel</u> Def. Äquivalenzrel. auf M durch $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Nachrechnen, dass das Äquivalenzrel. ist

① Symmetrie ✓
② Reflexivität ✓
③ Transitivität

<u>zur Trans</u> Seien (a_1, b_1), (a_2, b_2) und $(a_3, b_3) \in M$ gegeben mit

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \text{und} \quad (a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad \text{und} \quad a_2 b_3 = a_3 b_2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 b_2 b_3 = a_2 b_1 b_3 \quad \text{und} \quad a_2 b_3 = a_3 b_2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 b_2 b_3 = a_3 b_1 b_2 \quad \underset{\substack{R \text{ Int.ring} \\ b_2 \neq 0}}{\Rightarrow} \quad a_1 b_3 = a_3 b_1 \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$$

□

<u>Def</u> $Q(R) = M/\sim$ ⇝ Quotient = Menge der Äquivalenzklassen.

<u>Notation</u> Die Äquivalenzklasse des Bruchs (a, b) wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

Betr. die Abb $\iota : R \to Q(R);\quad a \mapsto \frac{a}{1}$.

Konstruktion des Quotientenkörpers $Q(R)$ ... als Körper

Def. auf Repräsentanten-Niveau eine Abb

$$+ : Q(R) \times Q(R) \to Q(R) ; \quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 \cdot b_2}$$

Muss die Wohldefiniertheit zeigen: Gegeben Elte $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1'}{b_1'}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2'}{b_2'}$

muss zeigen: $$\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 \cdot b_2} = \frac{a_1' \cdot b_2' + a_2' \cdot b_1'}{b_1' \cdot b_2'}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1' \cdot b_2' (a_1 \cdot b_2 + a_2 b_1) = b_1 \cdot b_2 (a_1' \cdot b_2' + a_2' \cdot b_1')$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1' \cdot b_2' \cdot a_1 \cdot b_2 + b_1' \cdot b_2' a_2 b_1 = b_1 b_2 a_1' \cdot b_2' + b_1 b_2 a_2' \cdot b_1'$$

Wissen:
$a_1 \cdot b_1' = a_1' \cdot b_1$
$a_2 b_2' = a_2' \cdot b_2$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 \cancel{b_2' a_1'} b_2 + b_1' \cancel{b_2 a_2'} b_1 = b_1 \cancel{b_2 a_1'} \cdot b_2' + b_1 \cancel{b_2} a_2' \cdot b_1'$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Damit die Wohldef.heit gezeigt! □

Analog def Multiplikation

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} := \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$, wieder ist Wohldef.heit zu zeigen

$\rightsquigarrow$ Hausaufgabe!

Noch zu zeigen

- Körperaxiome gelten (z.B. mult Inverse $\left(\frac{a}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{a}$ ....)
- Die Abb i ist Ringmorphismus

$\rightsquigarrow$ Hausaufgabe.

Konstruktion des Quotientenkörpers ... Beweis der universellen Eigenschaft.

Sei ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & Q(R) \arrow[d, dashed] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & L \end{tikzcd}$$

muss zeigen: $\exists!$ Morph. h so dass das Diagramm kommutiert.

<u>Vorüberlegung</u> ang, hätten einen Morph. h schon gefunden. Dann gilt $\forall a \in R$

$$\varphi(a) = h(\iota(a)) = h\left(\frac{a}{1}\right)$$

Weiter gilt für jedes Elt $\frac{a}{b} \in Q(R)$:

$$h\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(\frac{a}{1} \cdot \left(\frac{b}{1}\right)^{-1}\right) = h\left(\frac{a}{1}\right) \cdot h\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}$$
$$= \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} \qquad (*)$$

<u>Konsequenz</u> Wenn h existiert, dann ist h wohl eindt.

Existenz von h beweise ich, indem ich $(*)$ als Def. nehme.

Dann: Kommutativität klar, muss zeigen:

- Wohldefiniertheit
- h ist Körpermorphismus

} Hausaufgabe.

□