Beweis des Kriteriums von Gauß gegeben sei $f(x) \in R[x]$.

zu zeigen: wenn $f \in K[x]$ reduzibel ist, dann auch reduzibel in $R[x]$.

Schreibe $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \in R[x]$, wobei alle $a_i \in R$

und nehme an, es gebe $g(x), h(x) \in K[x]$ s.d. $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ in $K[x]$ gilt.

Ziel f ist in $R[x]$ reduzibel.

OE $ggT(a_0, \dots, a_n) = 1$, denn sonst wäre der ggT ja schon ein Teiler.

Wissen (Lemma 7.1.4): $\exists\, a, b \in K$ s.d. $a \cdot g$ und $b \cdot h \in R[x]$, wo der ggT der Koeff. jeweils gleich 1 ist.

Also gilt in $R[x]$: $$(a \cdot b) \cdot f(x) = (a \cdot g(x))\,(b \cdot h(x))$$

Beh 1 $a \cdot b \in R$

Beweis der Beh 1 Ang. es gäbe Primelt. $p \in R$, dass in $a \cdot b$ mit neg. Exponenten auftritt, dann: $p \mid f(x)$, also Widerspruch zur Ann. $ggT(a_0, \dots, a_n) = 1$ ist. $\square$ Beh 1.

Beh 2 $a \cdot b \in R^*$

Beweis der Beh 2 Ang. nicht. Dann hätte $a \cdot b \in R \setminus R^*$ einen echten Primteiler p. Also: $p \mid a$ oder $p \mid b$. Wissen auch: p ist prim in $R[x]$ also: $p \mid (a \cdot g(x))$ oder $p \mid (b \cdot h(x))$. Keines davon ist möglich, da $ggT(\text{Koeff. von } a \cdot g) = 1$, ditto mit $b \cdot h$ $\lightning$ $\square$ Beh. 2

Also. $$(a \cdot b) \cdot f(x) = (a \cdot g(x)) \cdot (b \cdot h(x)) \qquad \mid \cdot (a \cdot b)^{-1} \in R$$

$$f(x) = \underbrace{\left((a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot g(x)\right)}_{\in R[x]} \cdot \underbrace{(b \cdot h(x))}_{\in R[x].}$$

$\square$