Beweis von Satz 7.2.1 (Eisenstein-Kriterium)

Sei $f = a_0 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n$; $ggT(a_0, \dots, a_n) = 1$

Sei $p \in R$ prim, $p \mid a_0, \dots, p \mid a_{n-1}$, $p^2 \nmid a_0$

Müssen zeigen: f ist irreduzibel.

Ang., nicht. Dann schreiben wir $f = g \cdot h$ wobei

$$g = \sum b_\nu \cdot X^\nu \qquad h = \sum c_\mu \cdot X^\mu .$$

Beob. $ggT(a_0, \dots a_n) = 1$, d.h. $p \nmid a_n$. Ebenso: $\exists$ b_ν s.d. $p \nmid b_\nu$

$\exists$ c_μ s.d. $p \nmid c_\mu$.

Stelle fest $a_0 = c_0 \cdot b_0$. Also $p \mid a_0 \Rightarrow p \mid b_0$ oder $p \mid c_0$. ABER: p teilt nicht beide, da ja $p^2 \nmid a_0$.

OE nehme an. $p \mid b_0$ und $p \nmid c_0$.

Insgesamt: finde Index i: $p \mid b_0$, $p \mid b_1, \dots, p \mid b_{i-1}$, $p \nmid b_i$

Dann betrachte

$$\underset{\sim}{a_i} = \underset{\sim}{b_0 \cdot c_i} + \underset{\sim}{b_1 \cdot c_{i-1}} + \underset{\sim}{b_2 \cdot c_{i-2}} + \dots + \underset{\sim}{b_{i-1} \cdot c_1} + b_i \cdot c_0 \qquad (*)$$

es gilt $p \mid a_i$ wissen auch $p \mid b_0$, also $p \mid b_0 \cdot c_i$

$\vdots$

$p \mid b_{i-1}$, also $p \mid b_{i-1} \cdot c_1$

Also: $p \mid b_i \cdot c_0$. Aber wissen $p \nmid b_i$ und $p \mid c_0$, im Widerspruch dazu, dass p prim ist. $\square$