Beweis von Satz 8.3.1 (a transzendent $\Rightarrow K(a) \cong K(x) = Q(K[x])$)

Betr. den Substitutionsmorph.

$$\varphi: \begin{array}{ccc} K[x] & \longrightarrow & L \\ f & \longmapsto & f(a) \\ \sum a_i \cdot x^i & \longmapsto & \sum a_i \cdot a^i \end{array}$$

Wissen: a ist transzendent $\Rightarrow \ker(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi$ ist injektiv.

Ausserdem: $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq K(a)$

Univ. Eigenschaft des Quotientenkörpers:

$$\begin{tikzcd} K[x] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q(K[x]) = K(x) \arrow[d, "\exists!\,\eta"] \\ K[x] \arrow[r, "\varphi"'] & K(a) \end{tikzcd}$$

Wissen: • η ist injektiv, weil Körpermorphismus

• $\mathrm{Bild}(\eta) \subseteq K(a)$; $\mathrm{Bild}(\eta)$ enthält a und K

$\Rightarrow \mathrm{Bild}(\eta) = K(a)$; also ist η auch surjektiv.

Insges: η ist isomorph. $\square$