Beweis von Satz 8.3.2 Dreiteilung des Winkels falls $e^{i\varphi}$ transzendent ist.

Bem $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = (e^{i\varphi})^{-1}$

Betr. $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$ $\quad \overline{M} = \{0, 1, \overline{e^{i\varphi}}\}$

$$K = \underbrace{\mathbb{Q}(M \cup \overline{M})}_{=\mathbb{Q}(M)} = \mathbb{Q}(e^{i\varphi}) \cong \mathbb{Q}(y)$$

Isomorphie bildet y auf $e^{i\varphi}$ ab.

Beh: $[K(e^{i\varphi/3}) : K] = 3$. Damit ist nach Satz 8.1.4 $e^{i\varphi/3}$ nicht aus M konstruierbar.

Dazu zeige ich $f(x) = x^3 - e^{i\varphi} \in K[x]$ ist das Minimalpolynom.

Klar: $f(e^{i\varphi/3}) = 0$. Also reicht es, z. z.

$f(x) = x^3 - e^{i\varphi} \in K[x]$ ist irreduzibel.

$\Leftrightarrow$ $\quad x^3 - y \in Q(\mathbb{Q}[y])[x]$ ist irreduzibel.

$\Leftrightarrow$ $\quad x^3 - y \in (\mathbb{Q}[y])[x]$ — " —

Aber: $x^3 - \underline{\underline{y}} \in (\mathbb{Q}[y])[x] = \mathbb{Q}[x, y]$ ist ein Eisenstein Polynom für das Primelement y.

$\square$