__Buchberger-Kriterium.__ Ang. $\forall i, j$ ist 0 ein Divisionsrest von $S(f_i, f_j)$.

__Zu zeigen:__ $\forall f \in (f_1, \dots, f_m)$ ist in(f) ein Vielfaches von einem der in(f_i).

Sei also ein $f \in (f_1, \dots, f_m)$.

Schreibe

$$f = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot f_i$$

Polynom.

Dann

$$\text{in}(f) \leq \max\{\text{in}(q_i \cdot f_i) \mid i \in 1, \dots, m\}. = \delta \qquad (*)$$

Falls Gleichheit gilt, dann ist in(f) gleich einem in$(q_i \cdot f_i) = \text{in}(q_i) \cdot \text{in}(f_i)$ für ein geeignetes i, also ist in(f) Vielfaches von in(f_i).

__Also__ Nehme an, dass in $(*)$ strikte Ungleichheit herrscht, d.h. in$(f) < \delta$.

__Ziel__ Produziere eine neue Darstellung

$$f = \sum q_i' \cdot f_i$$

wo alle in$(q_i' \cdot f_i) < \delta$ sind.

__Beob__ Wenn wir das Ziel erreichen, starte neu mit dieser Darstellung. Das Verfahren terminiert nach endl. vielen Schritten, weil δ nur endlich oft fallen kann. Also muss irgendwann Gleichheit in $(*)$ gelten.

<u>Schritt 1</u> Nach Umnummerieren können wir OE annehmen, dass

$$\operatorname{in}(q_i \cdot f_i) = \delta \quad \text{ist für } i = 1, \dots, t$$

$$\operatorname{in}(q_i \cdot f_i) < \delta \quad \text{ist für } i > t.$$

Dann ist

$$f = \sum_{i=1}^{t} q_i \cdot f_i + \sum_{i>t} q_i \cdot f_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{t} (\operatorname{in} q_i) \cdot f_i}_{=A} + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} (q_i - \operatorname{in}(q_i)) \cdot f_i}_{=:B} + \underbrace{\sum_{i>t} q_i \cdot f_i}_{=:C}.$$

<u>Beob</u>
- Alle Terme in B und in C sind kleiner als δ.
- Alle Terme in f sind kleiner als δ.

$\Rightarrow$ Alle Terme in der Summe A sind kleiner als δ.

Um Ziel zu erreichen, genügt es, folgende Aussage zu zeigen

<u>Ziel'</u> Produziere Darstellung

$$A = \sum q_i' \cdot f_i \quad \text{wo alle } \operatorname{in}(q_i' \cdot f_i) < \delta \text{ sind.}$$

<u>Schritt 2</u> Da alle Terme von A kleiner als δ sind, gilt nach Lemma 8.6.3:

A ist Linearkombination der Polynome

$$S_{ij} := S\left(\operatorname{in}(q_i)\cdot f_i,\ \operatorname{in}(q_j)\cdot f_j\right) \qquad \text{wo } i,j \leq t.$$

<u>Ziel</u> " Produzieren für alle $i,j \leq t$ eine Darst. von

$$S_{ij} = \sum q_i' \cdot f_i \;, \quad \text{wo} \quad \operatorname{in}(q_i' \cdot f_i) < \delta \quad \text{ist.}$$

Schritt 3 Erinnerung: $\forall\, i \leq t$ ist $\mathrm{in}(q_i \cdot f_i) = S$

Benutzen Sie das und rechnen Sie nach:

$$s_{ij} = (\mathrm{const}) \cdot \frac{S}{\mathrm{kgV}(\mathrm{in}\, f_i, \mathrm{in}\, f_j)} \cdot S(f_i, f_j)$$

Ziel "" Produziere Darstellung

$$S(f_i, f_j) = \sum q_k' \cdot f_k \qquad \text{wobei} \quad \mathrm{in}(q_k' \cdot f_k) < \mathrm{kgV}(\mathrm{in}\, f_i, \mathrm{in}\, f_j)$$

Schritt 4 Annahme: $S(f_i, f_j)$ hat Divisionsrest $= 0$

Also gibt es eine Darst.

$$S(f_i, f_j) = \sum q_k' \cdot f_k$$

Def von S-Polynom, Beob. 8.6.2.

wobei $\quad in(q_k' \cdot f_k) \leq in\, S(f_i, f_j) < kgV(in\, f_i, in\, f_j)$

Damit ist Ziel "'" erreicht. $\square$