Beweis von Satz 10.4.8: Lokalisierung ist exakt

Müssen zeigen: $\operatorname{img}(S^{-1}\alpha) = \ker(S^{-1}\beta)$.

Beobachtung: Die Inklusion „$\subset$" ist klar, denn

$$(S^{-1}\beta)\circ(S^{-1}\alpha) \underset{10.4.3}{=} S^{-1}(\underbrace{\beta\circ\alpha}_{=0 \text{ per Ann.}}) = 0$$

Müssen nur die Richtung „$\supset$" zeigen.

Sei also ein Element $\frac{b}{s} \in \ker(S^{-1}\beta)$ gegeben. Das bedeutet

$$0 = \frac{0}{1} = (S^{-1}\beta)\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{\beta(b)}{s} \quad \text{in } S^{-1}C.$$

Per Definition von $S^{-1}C$ heisst das: $\exists\, t \in S$: $\underbrace{\beta(b)\cdot t}_{t(\beta(b)\cdot 1 - s\cdot 0)} = 0$

$$\Rightarrow \quad \beta(b\cdot t) = 0; \text{ d.h. } b\cdot t \in \ker(\beta)$$

β ist Modulmorph

$$\underset{\text{Ann.}}{\Rightarrow} \quad \exists\, a \in A: \quad \alpha(a) = b\cdot t$$

Dann betrachte $\frac{a}{s\cdot t} \in S^{-1}A$. Es ist $(S^{-1}\alpha)\left(\frac{a}{s\cdot t}\right) = \frac{\alpha(a)}{s\cdot t} = \frac{b\cdot t}{s\cdot t} = \frac{b}{s}$

also: $\frac{b}{s} \in \operatorname{img}(S^{-1}\alpha)$. $\square$