# Beweis von Satz 10.6.6

(1) Sei $J \subset S^{-1}R$. Dann $J = S^{-1}\phi^{-1}(J)$

Beweis von „$\subseteq$": Sei $r/s \in J$. Dann ist $s/1 \cdot r/s = r/1 \in J$, also ist $r \in \phi^{-1}(J)$

Also ist $r/s \in S^{-1}\phi^{-1}(J)$.

Beweis von „$\supseteq$" Sei $x \in S^{-1}\phi^{-1}(J)$ gegeben. Per Annahme, können $x$ schreiben als $x = r/s$ wo $r \in \phi^{-1}(J)$, $s \in S$.

Per Def. von $\phi^{-1}(J)$ bedeutet das: $r/1 \in J$

Also $x = r/s = 1/s \cdot \underbrace{r/1}_{\in J} \in J$. $\square$

② Sei $I \subset R$. Dann ist $\phi^{-1}(S^{-1}I) = \{ r \in R \mid \exists s \in S: \ r \cdot s \in I \}$

Beweis: es ist

Gleichheit in $S^{-1}R$

$$\phi^{-1}(S^{-1}I) = \{ r \in R \mid r/1 \in S^{-1}I \}$$

$$= \{ r \in R \mid \exists a \in I, s \in S: \ r/1 = a/s \}.$$

$$= \{ r \in R \mid \exists a \in I, t, s \in S: \ \underbrace{t(rs - a \cdot 1) = 0}_{r \cdot (t \cdot s) = a \cdot t \ \in I} \}$$

$$\overset{(*)}{=} \{ r \in R \mid \exists t, s \in S: \ r \cdot t \cdot s \in I \}.$$

$$\overset{(*)}{=} \{ r \in R \mid \exists s \in S: \ r \cdot s \in I \}.$$

(*) Hausaufgabe: schauen sie sich die Logik an! □

③ Sei $I \subset R$. Dann äquivalent

- $\exists\, J \subset S^{-1}R: \quad I = \phi^{-1}(J)$
- $I = \{ r \in R \mid \exists\, s \in S: r \cdot s \in I \}$.

<u>Beweis „⇐"</u> Das ist Punkt ②

<u>Beweis „⇒"</u> Sei $I = \phi^{-1}(J)$. Dann will Gleichheit zeigen, wobei „⊆"

Also ist „⊇". Sei also $r \in R$ gegeben, s.d. $s \in S$ existiert mit $r \cdot s \in I$.

Das heisst: $\frac{r \cdot s}{1} \in J$. Wg. Idealeigenschaft von $J$ ist $\phi^{-1}(J)$

dann auch $\frac{1}{s} \cdot \frac{r \cdot s}{1} \in J$, d.h. $\frac{r}{1} \in J$, d.h. $r \in \phi^{-1}(J) = I$ $\square$