Beweis des Lemmas von Nakayama: Sei M endlich erzeugt, sei $\mathfrak{m} \cdot M = M$.

Sei $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ eine endl. Menge, die M als R-Modul erzeugt. Nach Annahme ist jedes x_i auch in $\mathfrak{m} \cdot M$, deshalb kann ich schreiben

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \cdot x_j \qquad \text{wobei } r_{ij} \in \mathfrak{m}!$$

Betr. Matrix

$$A = (\delta_{ij} - r_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n; R)$$

Nach Konstruktion ist
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte $\det A \in R$; direkt aus der Def. der Determinante

$$\left[\det = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \dots \right]$$ folgt: $\det A = 1 + \mu$ für ein $\mu \in \mathfrak{m}$

Das bedeutet: $\det A \notin \mathfrak{m}$. Nach Satz 10.7.3 folgt also $\det A \in R^*$.

Aber die Cramersche Regel (Satz 3.3.2) sagt

$$\underbrace{(\det A)}_{\in R^*} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^* \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \Rightarrow \text{alle } x_i = 0. \Rightarrow M = 0 \qquad \square$$