Beweis von Satz II.1.1 (alg. Beschreibung der Multiplizität)

Schritt 1 Wir können OE annehmen, dass $p = \vec{0} \in \mathbb{A}^2$.

Schritt 2 Wir wissen $m_p^{n+1} \subseteq m_p^n$. Deshalb gibt es exakte Sequenz

$$0 \to m_p^n / m_p^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_p(f) / m_p^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_p(f) / m_p^n \to 0$$

Also: (Dimensionsformel)

$$\dim \mathcal{O}_p(f) / m_p^{n+1} = \dim m_p^n / m_p^{n+1} + \dim \mathcal{O}_p(f) / m_p^n$$

$$\Rightarrow \dim m_p^n / m_p^{n+1} = \dim \mathcal{O}_p(f) / m_p^{n+1} - \dim \mathcal{O}_p(f) / m_p^n \qquad (*)$$

Ich werde gleich zeigen, dass für ausreichend große n die Gleichung einer Konst. existiert, so dass

$$\boxed{\dim \mathcal{O}_p(f) / m_p^n = n \cdot \mathrm{mult}_p(f) + \mathrm{const.}}$$ gilt.

Zusammen mit $(*)$ ~~gig~~ ergibt sich dann die Beh. des Satzes.

Schritt 3 Betr. die Sequenz

$$0 \to m^n \to k[f] \longrightarrow k[f] / m^n \to 0$$

$$k[f] = k[x,y]/(f), \qquad k[f]/m^n = k[x,y]/(m^n, f)$$

Erinnerung: Lokalisieren ist exakt (Satz 10.4.8), erhalte also exakte Sequenz

$$0 \to m_p^n \to \mathcal{O}_p(f) \to \underbrace{\mathcal{O}_p(f) / m_p^n}_{\text{Lemma 11.1.4}} \to 0$$

$$= k[x,y]/(m^n, f)$$

Also „nur noch" zu zeigen: für $n \gg 0$ ist

$$\boxed{\dim k[x,y]/(m^n, f) = n \cdot \mathrm{mult}_p(f) + \text{const.}}$$

Schritt 4 Betr. die Abb.

$$\begin{array}{ccc} k[x,y] & \to & k[x,y] \\ g & \mapsto & g\cdot f \end{array}$$

Erinnerung: das Polynom f liegt in $\mathfrak{m}^{\mathrm{mult}_p(f)}$. Also, für $n > \mathrm{mult}_p(f)$ bildet die Abb. $\mathfrak{m}^{n-\mathrm{mult}}$ auf $\mathfrak{m}^n$ ab. Nachrechnen, dies liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to k[x,y]/\mathfrak{m}^{n-\mathrm{mult}} \to k[x,y]/\mathfrak{m}^n \to k[x,y]/(\mathfrak{m}^n, f) \to 0$$

Restklasse von g $\mapsto$ Restklasse von $g\cdot f$

Dimensionsformel

$$\dim k[x,y]/(\mathfrak{m}^n, f) = \underbrace{\dim k[x,y]/\mathfrak{m}^n}_{\text{berechenbar!}} - \dim k[x,y]/\mathfrak{m}^{n-\mathrm{mult}}.$$

Wissen: $\mathfrak{m} \subset k[x,y]$ ist das Ideal (x,y). Eine k-Vektorraumbasis von $k[x,y]/\mathfrak{m}^n$ ist demnach gegeben durch alle Monome von Grad $< N$.

Die Monome von Grad k sind $x^k, x^{k-1}\cdot y, \dots, x y^{k-1}, y^k$ das sind $(k+1)$ Stück.

Also $\dim k[x,y]/\mathfrak{m}^n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n(n-1)}{2}$

Also: $\dim k[x,y]/(\mathfrak{m}^n, f) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-\mathrm{mult})(n-\mathrm{mult}-1)}{2}$

$= n \cdot \mathrm{mult} + \mathrm{const.}$ $\square$