Beweis von Satz 11.1.5

Schritt 1: (1) $\Rightarrow$ (2) Wissen: m ist ein Hauptideal. Sei t ein Erzeuger, $m = (t)$.

Sei ein $z \in R \setminus \{0\}$ gegeben.

Existenz der Darstellung Falls $z \in R^*$ ist, fertig $z = z \cdot t^0$.

Ansonsten: Nach Satz 10.7.3 ist $z \in m = (t)$. Also $\exists\, z_1 \in R$: $z = z_1 \cdot t$ ist.

Falls $z_1 \in R^*$ ist, fertig. Ansonsten $\exists\, z_2 \in R$: $z = z_2 \cdot t^2$

$\vdots$

Der Prozess bricht nach endl. vielen Schritten ab, weil wg. Noether die Kette von Idealen

$$(z) \subsetneq (z_1) \subsetneq (z_2) \subsetneq \dots$$

stationär wird. $\square$

Eindeutigkeit Sei $z = u_1 \cdot t^{n_1} = u_2 \cdot t^{n_2}$ OE $n_1 \geq n_2$

Weil R Integritätsring ist, kann ich kürzen

$$t^{(n_1 - n_2)} = u_1^{-1} \cdot u_2 \in R^*$$

$\Rightarrow n_1 = n_2$. Dann ist auch $u_1 = u_2$. $\square$

Schritt 2: (2) $\Rightarrow$ (1) Eigenschaft (1) folgt, wenn ich zeige, dass jedes Ideal in R von der Form (t^n) ist. Sei $I \subset R$ ein Ideal, dann sei n die minimale ~~Potzen~~ Potenz, mit der t in den Darstellungen der Elte von I auftaucht.

Dann ist klar:

① $t^n \in I$

② Jedes $z \in I$ ist Vielfaches von t^n $\square$

$\shortparallel$

$t^m \cdot$ (Einheit)