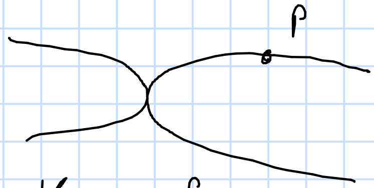
## Beweis von Satz 11.1.12




Kurve f.

**Implikation $2 \Rightarrow 1$** Sei also $\mathrm{mult}_p(f) = 1$.

OE $p = 0$ und $x$-Achse (= Menge $\{y = 0\}$) ist die Tang.gerade der Kurve $f$ bei $p$.

Insgesamt: kann schreiben $f(x,y) = y + $ (Terme höherer Ordnung)

$$= y \cdot \big(1 + A(x,y)\big) + x^2 \cdot B(x) \qquad (*)$$

wobei $1 + A(0,0) \neq 0$, also $1 + A(x,y)$ ist im lok. Ring $\mathcal{O}_p(f)$ invertierbar.

Im lok. Ring ist $f = 0$; wende Lok.abb. $\phi$ auf beide Seiten von $(*)$ an, erhalte

$$0 = y \cdot (1 + A) + x^2 \cdot B \quad \text{in } \mathcal{O}_p(f)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-x^2 \cdot B}{1 + A} = \frac{-x \cdot B}{1 + A} \cdot x \quad \text{also } y \in (x) \text{ in } \mathcal{O}_p(f).$$

Das max. Ideal im $\mathcal{O}_p(f)$ ist $(x,y) = (x)$, also ein Hauptideal

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_p(f)$ ist diskreter Bewertungsring! $\square$

Satz 11.1.5

Implikation 1 $\Rightarrow$ 2 Sei $\mathcal{O}_p(f)$ ein diskreter Bewertungsring mit unifor.

Parameter $t$. Zu zeigen

$$1 \overset{!}{=} \mathrm{mult}_p(f) \underset{\text{Satz II.1.1}}{=} \dim \mathfrak{m}_p^n / \mathfrak{m}_p^{n+1} \quad \text{für } n \gg 0.$$

Jetzt ist klar: $t^n \in \mathfrak{m}_p^n$; jedes El. von $\mathfrak{m}_p^n$ ist von der Form $t^a \cdot b$, wo $a \geq n$, $b \in \mathcal{O}_p(f)^*$

$\Rightarrow \{t^n\}$ ist Basis von $\mathfrak{m}_p^n / \mathfrak{m}_p^{n+1}$ als $k$-VR. $\square$