Beweis von Satz 12.2.5

Beweis von (1) Sei also ein Element $x \in B/q$ gegeben. Repräsentiere x durch $b \in B$.

Wissen: es existiert Ganzheitsgleichung

$$b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{mit } a_\bullet \in A \qquad (*)$$

Dann gilt für die Restklassen in B/q

$$x^n + \overline{a_{n-1}} \cdot x^{n-1} + \dots + \overline{a_0} = 0$$

wo $\overline{a_\bullet}$ im Bild von $A/p \to B/q$ liegen.

Also ist $x \in B/q$ ganz über A/p. □

Beweis von (2): Sei $x \in S^{-1}B$ gegeben. Schreibe x als $\frac{b}{s}$ wo $b \in B$, $s \in S$.

Wissen: b erfüllt Ganzheitsgleichung über A wie in $(*)$. Dann

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s} \cdot \left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{s^n} = 0$$

Das ist eine Ganzheitsgleichung von b/s über $S^{-1}A$. □