Beweis von 12.2.8 Situation $A \subset B$ ganz, $p \subset A$ ein Primideal

Gesucht: Primideal $q \subset B$, s.d. $p = q \cap A$. Betr. Inklusion $\iota : A \to B$, lokalisiere, erhalte ein Diagramm: (kommutativ!).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\phi_A"'] & B \arrow[d, "\phi_B"] \\ A_p \arrow[r, hook, "\iota_p"'] & B_p \end{tikzcd}$$

Satz 12.2.5: $B_p \supset A_p$ ist ganz.

Wähle ein max. Ideal $m \subset B_p$. Betr. $\iota_p^{-1}(m) = m \cap A_p$.

Das ist ein Primideal nach Prob. 12.2.7 sogar ein maximales Ideal.

Aber: A_p ist ein lokaler Ring, hat genau ein max. Ideal, näml. $p \cdot A_p$.

Also: $p \cdot A_p = m \cap A_p = \iota_p^{-1}(m)$.

Also,

$$\begin{aligned} p &= \phi_A^{-1}(p \cdot A_p) \qquad \text{(Abschnitt 10.6)} \\ &= \phi_A^{-1}(\iota_p^{-1}(m)) \\ &= \iota^{-1}(\underbrace{\phi_B^{-1}(m)}_{=: q \text{ ist Primideal in } B}) = A \cap q. \end{aligned}$$

Damit ist q gefunden! $\square$