

## Beweis von Satz 12.2.8: Invarianz der Dimension

Sei  $A \subset B$  eine ganze Ringextension.

Schritt 1  $\dim A \geq \dim B$

Sei  $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \dots$  eine Kette von Primidealen in  $B$ . Setze  $p_i := q_i \cap A$ .

Erhalte Kette von Primidealen  $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots$  in  $A$ .

B.h. Die  $p_i$  sind unterschiedlich, denn wenn  $p_j = p_{j+1}$  wäre, dann ist nach Satz 12.2.9  $q_j = q_{j+1}$   $\nabla$   $\square$

Schritt 2  $\dim A \leq \dim B$ .

Sei  $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots$  eine Kette von Primidealen in  $A$ . Wende wiederholt „Going Up“ an, erhalte Kette  $q_0 \subsetneq \dots$  von Primidealen in  $B$  s.d.

$\forall j: p_j = q_j \cap A$ . Insbes. sind alle  $q_j$  unterschiedlich.  $\square$