Beweis von Lemma 13.2.1 (allgemeiner Fall) Sei ein Polynom $f \in k[x_1 \dots x_n]$ gegeben. Schreibe

$$f = \sum_M a_M \cdot x^M = \sum_{M=(m_1 \dots m_n)} a_M \, x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$$

Beob: Wenn die r_i schon gefunden wären, dann $x_i = (y_i + x_n^{r_i})$ und

$$f = \sum_M a_M \, (y_1 + x_n^{r_1})^{m_1} \cdots (y_{n-1} + x_n^{r_{n-1}})^{m_{n-1}} \cdot x_n^{m_n}$$

$$= \sum_M a_M \, \Big(\underbrace{x_n^{m_n + r_1 m_1 + \dots + r_{n-1} m_{n-1}}}_{\text{Leit-Term}} + \text{kleinere Terme in } x_n, y_i \Big)$$

Erkenntnis: jeder Summand hat bereits die gewünschte Form!

Aber: Die Summe hat vielleicht nicht die gewünschte Form, denn die Leit-Terme der Summanden könnten sich weg heben!

Lösung: Die Leit-Terme heben sich in der Summe nicht weg, wenn wir durch Wahl der r_i sicherstellen können, dass die Zahlen

(*) $$m_n + r_1 m_1 + \dots + r_{n-1} m_{n-1}$$

für die unterschiedlichen Multi-Indizes M alle unterschiedlich sind!

Beob Eine solche Wahl der r_i ist möglich, zum Beispiel so:

Wähle Zahl K, die größer ist als alle m_i die überhaupt in ~~der~~ einem der Multi-Indizes M auftreten. Setze $r_i := K^i$. $\square$