Beweis von Lemma 13.2.1: Spezialfall: k hat ∞ viele Elemente

Sei wieder ein Polynom f gegeben. Zerlege f in homogene Komponenten,
$f = f_0 + \dots + f_m$, wo f_i homogen vom Grad i ist.

Beob: Wenn a_i gewählt sind, dann $x_i = y_i + a_i \cdot x_n$ und

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(y_1 + a_1 x_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n)$$
$$= x_n^i \cdot f_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) + (\text{kleinere Terme in } x_n, y_\bullet).$$

Also insgesamt

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n^m \cdot f_m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) + (\text{kleinere Terme in } x_n, y_\bullet)$$

Also: Wir sind fertig, wenn wir $a_1, \dots a_{n-1}$ finden können, s.d. $f_m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.

Betrachte $g(x_1, \dots, x_{n-1}) := f_m(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$.

Klar: f_m ist nicht das Nullpolynom. Außerdem: f_m ist homogen
$\Rightarrow$ g ist nicht das Nullpolynom.

Weil k unendl. viele Elte hat, $\exists\, a_1 \dots a_{n-1} \in k$: $g(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$. $\square$