Beweis Noether-Normalisierung, falls $A = k[x_1, \dots, x_n]$ und I ein Hauptideal, $I = (f)$.

OE die Variable x_n taucht in f tatsächlich auf.

Wähle $y_1, \dots, y_{n-1}$ wie in Lemma 13.2.1 und setze $y_n := f$

Beh Dies liefert Noether-Normalisierung.

Beob 1 Es ist $A = k[x_1, \dots, x_n] = k[y_1, \dots, y_n][x_n]$

Denn für alle $1 \leq i < n$ ist $x_i = y_i + x_n^{r_i}$ (bzw. $x_i = y_i + a_i \cdot x_n$) $\square$ (Beh 1)

Beob 2 x_n ist ganz über $k[y_1 \dots y_n]$, denn die Gleichung aus Lemma 13.2.1 sagt:

$$0 = f - y_n = a \cdot x_n^m + G_1(\vec{y}) \cdot x_n^{m-1} + \dots + G_m(\vec{y}) - y_n$$

Dies liefert eine Ganzheitsgleichung für x_n über $k[y_1, \dots, y_n]$.

Jetzt zeige ich Eigenschaften 13.0.1.1 - 13.0.1.3

① Falls $y_1, \dots, y_n$ k-algebraisch abhängig wären, dann wäre $\operatorname{trdeg} k(y_1, \dots, y_n) < n$.

Wegen Beob. 2 ist $k(y_1, \dots, y_n) \subset k(x_1, \dots, x_n)$ eine alg. Körpererw.

Also $\operatorname{trdeg}_k k(y_1, \dots, y_n) = \operatorname{trdeg}_k k(x_1, \dots x_n) = n$ $\lightning$.

② Folgt sofort aus Beob. 1 + 2 und Korollar 3.3.4.

③ Wir müssen zeigen   Ideal in $k[x_1,\dots,x_n]$

$$(f) \cap k[y_1,\dots y_n] = (y_n) \quad \text{in } k[y_1,\dots,y_n]$$

Die Inklusion „$\supseteq$" klar. Müssen „$\subseteq$" zeigen. Sei also

$$g \in (f) \cap k[y_1,\dots y_n] \quad \text{gegeben}$$

Wir wissen: kann g schreiben als:

$$g = h \cdot y_n \;, \quad \text{wobei } h \in k[x_1,\dots,x_n]$$

Wir wollen zeigen: g ist auch im Ring $k[y_1 \dots y_n]$ ein Vielfaches von y_n.

Klar: h ist ganz über $k[y_1,\dots,y_n]$. Schreibe Ganzheitsgleichung:

$$h^s + a_1 h^{s-1} + \dots + a_s = 0 \qquad \text{wobei } a_\bullet \in k[y_1,\dots,y_n] \qquad \Big| \cdot y_n^s$$

$$\Rightarrow \quad g^s + a_1 y_n g^{s-1} + \dots + a_s y_n^s = 0$$

$$\Rightarrow \quad g^s + y_n(\dots) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_n \mid g^s \quad \text{im Ring } k[y_1,\dots,y_n]$$

Isomorph zum Polynomring
Faktoriell!

$\square$

$$\Rightarrow \quad y_n \mid g \quad \text{im Ring } k[y_1,\dots,y_n]$$