Beweis: Noether-Normalisierung im Fall, wo $A = k[x_1 \dots x_n]$ ein Polynomring ist.

Trivial: Falls $I = (0)$, setze $y_i := x_i$. Fertig! Deshalb: OE $I \neq (0)$

Beweis per Induktion über $n = \#$ Anzahl der Variablen.

Ind. Start: $n = 1$. Der Ring $k[x_1]$ ist Hauptidealring, fertig nach Lem. 13.2.1

Ind. Schritt Sei $n > 1$, sei die Beh. für alle Polynomringe mit weniger Variablen bewiesen.

Wähle $f \in I$, $f \neq 0$; wende Lemma 13.2.1 auf das Hauptideal (f) an. Erhalte $y_1, \dots, y_n \in k[x_1 \dots x_n]$ s.d.

A $\{y_1, \dots, y_n\}$ sind alg. unabhängig

B $k[y_1, \dots, y_n] \subset k[x_1 \dots x_n]$ ist ganz

C $y_n \in k[y_1, \dots, y_n] \cap (f) \subset \underbrace{k[y_1, \dots, y_n] \cap I}_{=: I'}$

Betr. den Ring $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ und das Ideal $I'' = I \cap k[y_1, \dots, y_{n-1}]$

Induktionsannahme: $\exists\ t_1, \dots, t_{n-1} \in k[y_1, \dots, y_{n-1}]$:

D $\{t_1, \dots, t_{n-1}\}$ sind k-alg. unabhängig

E $k[t_1, \dots t_{n-1}] \subset k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ ist ganz

F $I' \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}] = (t_{\alpha+1}, \dots, t_{n-1})$.

Beh Die Elte $t_1, \dots, t_{n-1}, y_n$ liefern die gewünschte NN.

Ich muss (13.0.1.1) - (13.0.1.3) prüfen.

(2) Klar: (E) sagt: $y_1, \dots, y_{n-1}$ sind ganz über $k[t_1, \dots, t_{n-1}]$. Also

$$k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n] \subseteq k[y_1, \dots, y_n] \subset k[x_1, \dots, x_n]$$

sind jeweils ganz. Verwende Transitivität der Ganzheit.

(1) Wie im letzten Lemma: $k(t_1, \dots, t_{n-1}, y_n) \subset k(x_1, \dots, x_n)$ ist alg. Also

$$\operatorname{trdeg}_k k(t_1, \dots, t_{n-1}, y_n) = \operatorname{trdeg}_k k(x_1, \dots, x_n) = n$$

Also gibt es zwischen $t_1, \dots, t_{n-1}, y_n$ keine alg. Relationen.

(3) Wir zeigen $I_n \; k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n] = (t_{\alpha+1}, \dots, t_{n-1}, y_n)$ in $k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$

<u>Inklusion „$\supseteq$"</u> folgt aus (F) + (C)

<u>Inklusion „$\subseteq$"</u> Sei: $g \in I \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$ ist isomorph zu Polynomring.

Zerlege g in Terme mit und ohne y_n

$$(*) \qquad g := g^* + h \cdot y_n, \quad \text{wo } g^* \in k[t_1, \dots, t_{n-1}]; \; h \in k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$$

Klar: aus (C) folgt: $h \cdot y_n \in I$; also $g^* \in I \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}]$

aus (F) folgt: $g^* \in (t_{\alpha+1}, \dots, t_{n-1})$

Also insgesamt: $g \in (t_{\alpha+1}, \dots, t_{n-1}, y_n)$ in $k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$

$\square$