Beweis von Satz 13.3.1: $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$.

Wir wissen aus Bsp 12.1.7, dass $\dim k[x_1 \dots x_n] \geq n$. Also ist nur „$\leq$".

Genauer: gegeben eine strikte Kette von Primidealen $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \dots \subsetneq q_m$ von $k[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist $m \leq n$.

Beweis per Induktion nach n

Ind. start: $n = 0$ ✓ $n = 1$: Bsp 12.1.5

Ind. schritt Sei $n > 1$, sei die Beh. für kleinere Polynomringe schon bewiesen.

Führe NN für das Ideal $q_1 \subset k[x_1, \dots, x_n]$ durch. Erhalte $y_1 \dots y_n$ s.d. $p_1 := q_1 \cap k[y_1 \dots y_n] = (y_{\delta+1}, \dots, y_n)$.

Setze $p_0 := q_0 \cap k[y_1 \dots y_n]$. Nach Satz 12.2.9 erhalte ich strikte Kette

$$q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \dots \subsetneq q_m$$

von Primidealen in $k[y_1 \dots y_n]$.

Erste Konsequenz: $q_1 \neq (0)$. Insbes. $\delta < n$

Zusätzlich: Der Ring $k[y_1 \dots y_n]/p_1$ ist isomorph zum Polynomring in $\delta < n$ Variablen, enthält strikte Kette

$$p_1/p_1 \subsetneq p_2/p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_m/p_1$$

der Länge $m-1$. Induktionsvoraussetzung: $m - 1 \leq \delta < n$

$\Rightarrow m \leq n$ $\square$