Beweis von Satz 13.3.2 A ein Integritätsring, $\{y_1, \dots, y_d\}$ eine NN,

$q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq q_m$ max. lange Kette von Primidealen in A $\Rightarrow$ $m = d$

Beh Setze $p_0 = q_0 \cap k[y_1 - y_d]$. Das ist max. lange Kette von Primidealen im $k[y_1 - y_d]$.

Beweis der Beh Ang zwischen p_i und p_{i+1} passt noch ein Zwischen-Prim-Ideal.

Betr. NN von $p_i \subset k[y_1 - y_d]$, erhalte $t_1, \dots, t_d \in k[y_1 - y_d]$ s.d.

$$p_i \cap k[t_1 - t_d] = (t_{\alpha+1}, \dots, t_d)$$

Wir zuvor betr. Restklassen $\underline{t}_0 \in k[y_1 - y_d]/p_i \subset A/q_i$

Wir zuvor $k[\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_d] \subset k[y_1 - y_d]/p_i$ ist eine NN

und per Annahme gilt: zwischen $0 = p_i/p_i$ und p_{i+1}/p_i liegt im Ring $k[y_1 - y_d]/p_i$ noch ein Primideal p'.

Going-Down: Über p' gibt es ein Primideal q'

$$0 \subsetneq q' \subsetneq q_{i+1}/q_i \quad \text{in} \quad A/q_i$$

Das ist per Annahme nicht möglich! $\square$ (Beh)

Anwendung der Beh: Beweis der Aussage per Induktion nach d.

Start: $d=0$ ✓

Schritt: Sei $d>0$, sei die Beh. für kleinere d schon bewiesen.

Wähle eine NN $t_1 \ldots t_d \subset k[y_1 \ldots y_d]$ so dass $p_1 \cap k[t_1 \ldots t_d] = (t_{\alpha+1} \ldots t_d)$.

Behauptung zeigt: $\alpha = d-1$. Dann ist

$$0 = P_1/P_1 \subset P_2/P_1 \subset \cdots \subset P_m/P_1$$

eine max. lange Kette in $k[t_1, \ldots, t_{d-1}]$. Induktionsannahme: diese Kette hat Länge $d-1$. $\square$