Beweis von Satz 14.2.7: Eindeutigkeit Seien Int und Int^* zwei Definitionen.

Wir müssen zeigen: $\forall$ Kurven F, G und $\forall$ Punkte $p \in \mathbb{A}^2$: $\mathrm{Int}_p(F,G) = \mathrm{Int}^*_p(F,G)$.

Beob Nach ③ genügt es, den Fall zu betrachten, wo $p = 0 \in \mathbb{A}^2$

Beob Es ist $\mathrm{Int}_p(F,G) = \infty \overset{①}{\iff}$ F, G haben gemeinsame Komponente durch p

$$\underset{①}{\iff} \mathrm{Int}^*_p(F,G) = \infty$$

Genau so $\mathrm{Int}_p(F,G) = 0 \iff \mathrm{Int}^*_p(F,G) = 0$.

Insbesondere genügt es, den Fall zu betrachten, wo Schnittzahlen endlich sind.

Beweis der Gleichheit mit Induktion nach $Int_p(F, G)$

Ind.start $Int_p(F, G) = 0$ ... den Fall hatten wir in Beob. 2. ✓

Ind.schritt Sei $Int_p(F, G) > 0$, sei Gleichheit für alle Kurven mit kleinerer Schnittzahl schon bewiesen.

Nach ③ können wir OE annehmen, $F = y$

Schreibe $f(x) := F(x, 0)$ $g(x) := G(x, 0)$

$r := \deg f$ $s := \deg g$

Nach ④ kann ich OE annehmen: $r \leq s$.

Fall 1 $\quad f \equiv 0$. Dann $y \mid F$ und ich kann schreiben $F(x,y) = y \cdot F_2(x,y)$.

Eigenschaft (6):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Int}_p(F,G) &= \mathrm{Int}_p(y,G) + \mathrm{Int}_p(F_2,G) \\ \mathrm{Int}^*_p(F,G) &= \mathrm{Int}^*_p(y,G) + \mathrm{Int}^*_p(F_2,G). \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Falls F_2 den Punkt p gar nicht enthält, dann ist nach (2)

$$\mathrm{Int}_p(F,G) = \mathrm{Int}_p(y,G) \qquad \mathrm{Int}^*_p(F,G) = \mathrm{Int}^*_p(y,G)$$

aber (7)

$$\mathrm{Int}_p(F,G) = \mathrm{Int}_p(y,g) \underset{(5)}{=} \mathrm{mult}_p\, g \qquad \mathrm{Int}^*_p(F,G) = \mathrm{Int}^*_p(y,g) \underset{(5)}{=} \mathrm{mult}_p\, g$$

Falls F_2 den Punkt p enthält, dann ist

$$\mathrm{Int}_p(y,G) < \mathrm{Int}_p(F,G) \qquad \mathrm{Int}_p(F_2,G) < \mathrm{Int}_p(F,G)$$

und die Gleichheit von Int und Int^* gilt nach $(*)$ und Induktionsannahme.

Fall $f \not\equiv 0$. Wegen $r \leq s$ ist dann auch $g \not\equiv 0$.

OE sind f, g normiert (Skalieren von F, G ändert nichts nach ⑦).

Nach ⑦ ist

$$\mathrm{Int}_p(F, G) = \mathrm{Int}_p(F, \underbrace{G - x^{s-r} \cdot F}_{=: G'}) \qquad \mathrm{Int}_p^*(F, G) = \mathrm{Int}_p^*(F, G - x^{s-r} \cdot F)$$

Witz Setze $g'(x) := G'(x, 0)$. Dann ist $\deg g' < \deg g$.

Starte den Induktionsschritt neu mit F, G' anstelle von F, G.
Da der Grad nicht unbeschränkt sinken kann, müssen wir nach endl. vielen Schritten im Fall landen, wo $f \equiv 0$ ist. $\square$