Beweis von Eigenschaft 14.2.2.1 ŒE p ist der Nullpunkt.

Fall 1 F, G haben keine gemeinsame Kpte durch p. Nach ② kann ich dann ŒE annehmen, dass F, G gar keine gem. Kpte haben. Nach der erweiterten Erinnerung 14.2.6 ist dann $\mathrm{Int}_p(F, G) < \infty$.

Fall 2 F, G haben eine gemeinsame Kpte H durch den Punkt p.

Wir schreiben $F = H \cdot F_2$; $G = H \cdot G_2$ und $(F, G) \subset (H)$

Insbes. $(F, G) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \subseteq (H) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$

Haben Surjektion $\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) / (F,G) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) / (H) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$

Müssen nur zeigen: rechte Seite ist ∞-dim. k-Vektorraum.

Wende Exaktheit der Lokalisierung an auf die Sequenz

$$0 \to (H) \to k[x,y] \to k[x,y]/(H) \to 0$$

erhalte

$$0 \to (H) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \to \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \to \left(k[x,y]/(H) \right)_{m_p} \to 0$$

$$\left(k[x,y]/(H) \right)_{m_p} = \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) / (H) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2).$$

Betr. die Lokalisierungsabbildung

$$k[x,y]/(H) \to \left(k[x,y]/(H) \right)_{m_p} \simeq \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) / (H) \cdot \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$$

Wissen nach Lemma 10.3.6: der Kern der Lokalisierungsabb. besteht aus Nullteilern. ABER H ist irreduzibel, d.h. $k[x,y]/(H)$ ist Nullteilerfrei

Also, nur noch zu zeigen

$$\dim_k k[x,y]/(H) = \infty.$$

OE $H \neq x$. Ich behaupte, dass $x^2, x^3, x^4 \dots$ k-linear unabhängig sind.

Grund: jede Relation $\sum_{i=2}^{n} a_i \cdot x^i = 0$ in $k[x,y]/(H)$

präsentiert $\sum_{i=2}^{n} a_i x^i$ als Vielfaches von H in $k[x,y]$

Dann wäre H ein Polynom in x, $H \neq x$, H hat Nullstelle bei 0 und H ist irreduzibel. $\lightning$

$\square$