Beweis von Eigenschaft 14.2.2.6: Additivität in Komponenten

Gegeben Kurven F, G mit $G = \prod G_i$, dann ist $Int_p(F,G) = \sum Int_p(F, G_i)$

<u>Beob</u> Alle Ringe sind faktoriell! Es genügt daher, den Fall zu betrachten, wo

$G = E \cdot H$, und wo H irreduzibel ist. Müssen zeigen:

$$(*) \qquad Int_p(F, G) = Int_p(F, E) + Int_p(F, H)$$

<u>Beob</u> Wenn F, G gem. Kpte durch p haben, dann sind beide Seiten von $(*)$ gleich ∞, fertig. Wir nehmen also an: F, G haben keine gem. Komponenten (insbes. H keine Kpte von F).

Gleichung $(*)$ folgt aus Dimensionsformel für VR, wenn ich kurze exakte Sq. der folgenden Form konstruieren kann:

$$0 \to \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,E)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,E\cdot H)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,H)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \to 0$$

Konstruktion von α Die Abb. $\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) \to \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$; $f/g \mapsto f/g \cdot H$ bildet das Ideal $(F,E)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$ auf $(F, E\cdot H)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$ ab; liefert also wohldef. Abb α zwischen den Quotienten.

Injektivität von α Sei $f/g \in \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$ ein El., dessen Restklasse $[f/g] \in \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,E)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$ im $\ker(\alpha)$ liegt. Also:

$f/g \cdot H \in (F, E\cdot H)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$, ich kann schreiben $f/g \cdot H = f_1/g_1 \cdot F + f_2/g_2 \cdot E H$.

auf Hauptnenner bringen, liefert

$$f\cdot H\cdot g_1\cdot g_2 = f_1\cdot F\cdot g\cdot g_2 + f_2\, g g_1\, E H \quad \text{in } k[x,y]$$

Also: $H \mid f_1\cdot F g g_2$ in $k[x,y]$. Aber per Annahme: H ist keine Komponente von F

Also $H \mid f_1 \cdot g g_2$ und

$$f\, g_1 g_2 = \frac{f_1 g g_2}{H}\cdot F + f_2\, g g_1 \cdot E \quad \text{in } k[x,y]$$

Also:

$$f/g = \frac{\frac{f_1 g g_2}{H}}{g g_1 g_2}\cdot F + \frac{f_2 g g_1}{g g_1 g_2}\cdot E \in \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$$

Also $[f/g] = 0$ in $\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,E)\cdot\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$. $\Rightarrow$ α ist injektiv.

Konstruktion von β & Surjektivität Es ist klar, dass $(F, H) \supseteq (F, E\cdot H)$, also sei β die zugehörende surj. Abb.

Exaktheit in der Mitte Es ist

$\ker(\beta)$ = alle Elemente, die durch Vielfache von H repräsentiert werden können $= \operatorname{Img}(\alpha)$

$\square$