Satz 3.2.10 Äquivalent

(1) b ganz über A

(2) $A[b]$ ist als A-Modul endl. erzeugt

(3) $\exists$ Zwischenring $A[b] \subseteq M \subseteq B$, der als A-Modul endl. erzeugt ist und $b \cdot M \subseteq M$.

Beweis 1 $\Rightarrow$ 2 Sei b ganz über A mit Ganzheitsgleichung

$$b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

$\Rightarrow$ die Elemente $1, b, b^2, \dots, b^{n-1}$ erzeugen $A[b]$ als A-Modul. $\square$

Beweis 2 $\Rightarrow$ 3 Setze $M = A[b]$. $\square$

<u>Beweis 3 ⇒ 1</u> Ang. hätte Zwischenmodul M und Elemente $m_1, \dots, m_n \in M$, die M als A-Modul erzeugen. Dann kann ich schreiben

$$\left.\begin{aligned} b \cdot m_1 &= a_{11} \cdot m_1 + \dots + a_{1n} \cdot m_n \\ &\vdots \\ b \cdot m_n &= a_{n1} \cdot m_1 + \dots + a_{nn} \cdot m_n \end{aligned}\right\} \text{ mit geeigneten } a_{ij} \in A.$$

Fasse Gleichungen in Matrix zusammen

$$\Delta = \left(b \cdot \delta_{ij} - a_{ij} \right); \quad n \times n\text{-Matrix}$$

Dann:

$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ | \\ m_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Cramer-Regel: Wenn Δ^* die adj. Matrix ist, dann

$$\Delta^* \Delta \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ | \\ m_n \end{pmatrix} = \det(\Delta) \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ | \\ m_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

<u>Konsequenz:</u> $\det(\Delta) = 0 \quad \in B.$

Anders gesagt: das normierte Polynom $\det\left(x \cdot \delta_{ij} - a_{ij}\right) \in A[x]$ hat b als Nullstelle, ist also eine Ganzheitsgleichung für b!

$\square$