Satz von Bézout, Multiplikation mit z Sei $H \in R$ gegeben, s.d. $[z \cdot H] = 0$ in Γ.

$(\Leftrightarrow \exists A, B: \quad z \cdot H = AF + BG)$. Ich muss zeigen: $[H] = 0$ in Γ

$(\Leftrightarrow \exists A', B': \quad H = A'F + B'G)$

~~Erinnerung:~~ Per Annahme haben keine Nullstelle auf der ∞ fernen Gerade $\{z = 0\}$.

Das bedeutet: $F_0(x,y) = F(x,y,0)$ und $G_0(x,y) = G(x,y,0)$ haben keine gemeinsame Komponente.

Auf der anderen Seite folgt aus $zH = AF + BG$

$$0 = \underbrace{A(x,y,0)}_{=:A_0} \cdot F_0 + \underbrace{B(x,y,0)}_{=:B_0} \cdot G_0$$

Dann gibt es aber $C(x,y) \in k[x,y]$, so dass

$$B_0 = C \cdot F_0 \quad \text{und} \quad A_0 = -C \cdot G_0 \quad \text{ist.}$$

Jetzt betrachte $A + C \cdot G$ und $B - CF$. Beide Polynome werden identisch 0, wenn ich $z = 0$ setze, also sind beide Polynome Vielfache von z:

$$A + CG = z \cdot A' \qquad B - CF = z \cdot B'$$

Zusätzlich gilt:

$$z \cdot H = AF + BG = \underbrace{(A + CG)}_{z \cdot A'} F + \underbrace{(B - CF)}_{= z \cdot B'} G$$

Also: $H = A'F + B'G$. $\square$