Prop. 4.3.1 : L/K Körpererweiterung, $\Gamma = \{ \gamma_1, \dots, \gamma_n \}$ Tr. basis

$\{ c_1, \dots, c_m \} \subset L$ seien alg. unabhängig.

Ziel $m \leq n$

Annahme: $m \geq n$. Dann muss ich Gleichheit zeigen.

Wissen per Definition: $\{ c_1, \gamma_1, \dots, \gamma_n \}$ ist alg. abhängig, d.h.

$\exists$ Polynom $f(y, x_1, \dots, x_n) \in K[y, x_1, \dots, x_n]$ s.d.

$f(c_1, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0 \in K$

Folgendes ist klar:

- $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ waren alg. unabhängig; also tritt die Variable y im Polynom f tatsächlich auf.
- c_1 ist transz. über K, d.h. es tritt mind. eine der Variablen x_i im Polynom f auf. OE die Variable x_1 tritt auf.

Betrachte das Polynom

$$g(x) = f(c_1, x, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$ Offenbar ist $g(\gamma_1) = 0$.

- Falls $g \not\equiv 0$, dann: γ_1 ist alg. über $K(c_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$
- Falls $g \equiv 0$. Dann betrachte noch einmal f. Dort gibt es Term der Form

$$\tilde{f}(y, x_2, \dots, x_n) \cdot x_1^{\bullet}$$

Weil $g \equiv 0$, ist, verschwindet $\tilde{f}$, wenn ich $c_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ einsetze. Dann wiederhole Argument mit $\tilde{f}$ anstelle f. Weil $\deg \tilde{f} < \deg f$, erhalte ich nach endl. vielen Schritten die Aussage: γ_1 ist alg. über $K(c_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

Zusammenfassung: γ_1 ist alg. über $K(c_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

$\Rightarrow$ L ist alg. über $K(c_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

$K(c_1, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n)$ ist alg. über $K(c_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

$\Rightarrow$ L ist alg. über $K(c_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

Wiederholen Argument:

L ist alg. über $K(c_1, c_2, \gamma_3 \dots \gamma_n)$

$\vdots$

L ist alg. über $K(c_1, \dots, c_n)$

<u>Also:</u> $m \leq n$, denn wenn es ein EH c_{n+1} gäbe, dann wäre $\{c_1, \dots, c_n, c_{n+1}\}$ nicht alg. unabhängig $\lightning$

$\square$