Proposition 4.3.8 : Situation: haben Körper $K \subset L \subset M$.

Wähle Tr. basen $l_1, \ldots, l_a \subset L$ über K

$m_1, \ldots, m_b \subset M$ über L

Beh: $l_1, \ldots, l_a, m_1, \ldots, m_b$ ist Tr. basis von M über K.

Zu zeigen

1. Alg. unabhängig
2. Maximalität.

zu 1   Schreibe Elemente als Vektoren $\vec{l} = (l_1, \dots, l_a)$; $\vec{m} = (m_1, \dots, m_b)$

Sei $f(\vec{x}, \vec{y}) \in K[\vec{x}, \vec{y}]$ eine alg. Relation, d.h.

$$f(\vec{l}, \vec{m}) = 0$$

Müssen zeigen: $f \equiv 0$.

$$\text{Schreibe: } \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_I \overbrace{f_I(\vec{x})}^{\in K[\vec{x}]} \cdot \vec{y}^{\,I}$$

Dann ist

$$0 = f(\vec{l}, \vec{y}) = \sum_I \underbrace{f_I(\vec{l})}_{\in L} \cdot \vec{m}^{\,I}$$

L-Relation der $m_1, \dots, m_b$

Aber $m_1, \dots, m_b$ sind alg. unabhängig über L $\Rightarrow$ $\forall I: f_I(\vec{l}) = 0$.

Also: f_I sind K-alg. Relationen der $l_1, \dots, l_a$, also $\forall I: f_I \equiv 0$.

$$\Rightarrow \quad f(\vec{x}, \vec{y}) \equiv 0.$$

② Maximalität.

Zu zeigen: $M / K(\vec{l}, \vec{m})$ ist algebraisch.

Wir wissen: $\underbrace{L / K(\vec{l}) \text{ ist alg.}}$ und $M / L(\vec{m})$ ist auch alg.

$$\Rightarrow \quad L(\vec{m}) / K(\vec{l}, \vec{m}) \text{ ist alg.}$$

Transitivität der Algebraizität: $M / K(\vec{l}, \vec{m})$ ist algebraisch. $\square$