Beweis von Satz 5.1.1: Körpertheoretische Version des Nullstellensatzes.

Erinnerung: die Annahme sagt: $E = K[b_1, \dots, b_n]$ für geeignete $b_1, \dots, b_n \in E$

Beweis mit Induktion nach n.

Start: $n = 0$. Dann ist $E = K$, und es ist nichts zu zeigen.

Start: $n = 1$ Dann ist $E = K[b_1]$. Ich muss zeigen: b_1 ist alg. über K.

Ang. b_1 wäre transzendent. Das heißt: der Subst. morphismus

$$\begin{aligned} K[x] &\longrightarrow K[b_1] \\ f &\longmapsto f(b_1) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Wissen: $K[x]$ ist kein Körper ↯

Induktionsschritt: $n > 1$ Dann $E = K[b_1, b_2, \dots, b_n] = K(b_1)[b_2, \dots, b_n]$

Induktionsvoraussetzung: $E/K(b_1)$ ist algebraisch. Also: „nur" noch zu zeigen: b_1 ist algebraisch.

Widerspruchsbeweis: Ang. b_1 sei transzendent. Dann ist

$$K[b_1] \cong K[x] \; ; \qquad K(b_1) \cong K(x)$$

Behauptung $\exists\, u \in K[b_1]$, so dass E ganz ist über $K[b_1, u^{-1}]$

Beweis der Beh Wissen: $b_2, \dots, b_n$ sind alg. über $K(b_1)$. Also gibt es

für $i = 2, \dots, n$ jeweils Gleichungen

$$u_i \cdot b_i^{n_i} + r_{i,1} \cdot b_i^{n_i - 1} + \dots + r_{i,n_i} = 0 \qquad \text{wo } u_\bullet \neq 0 \,;\; r_{\bullet,\bullet} \in K(b_1) = K(x)$$

Kann die Gleichungen auf Hauptnenner bringen, OE annehmen $u_\bullet, r_{\bullet,\bullet} \in K[b_1] = K[x]$

Schreibe

$$u = \prod_{i=2}^{n} u_i \in K[b_1],$$ dann erhalte durch Division die Gleichungen

$$b_i^{n_i} + \underbrace{\frac{r_{i,1} \cdot \prod_{j \neq i} u_j}{u}}_{\in K[b_1, u^{-1}]} \cdot b_i^{n_i - 1} + \dots + \underbrace{\frac{r_{i,n_i} \cdot \prod_{j \neq i} u_j}{u}}_{\in K[b_1, u^{-1}]} = 0$$

Das sind Ganzheitsgleichungen für die Elte $b_2, \dots, b_n$ über $K[b_1, u^{-1}]$.

Weiter: $E = K[b_1, b_2, \dots, b_n] \underset{\text{Kor. 3.3.4}}{\Longrightarrow} E$ ist ganz über $K[b_1, u^{-1}]$

$\square$ (Beh.)

Anwendung der Behauptung.

Wissen: $K[b_1] \simeq K[x]$, also gibt es ein irreduzibles $p \in K[b_1]$, das u nicht teilt.

- Falls u nicht konst, nehme ich irred. Faktor von $u+1$
- Falls u konstant, dann nehme $p = b_1$.

Die Behauptung sagt: $1/p \in E$ ist ganz $K[b_1, u^{-1}]$. Also gibt es eine Ganzheitsgleichung

$$\left(1/p\right)^m + a_1 \cdot \left(1/p\right)^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad \text{alle } a_\bullet \in K[b_1, u^{-1}]$$

Multipliziere mit p^m und geeigneter Potenz von u, erhalte

$$u^{\xi} + b_1 \cdot p + \dots + b_m = 0 \qquad \text{wo } b_\bullet \in K[b_1] \simeq K[x]$$

Also $p \mid u^{\xi}$ in $K[b_1] \simeq K[x]$. Also: entweder ist p eine Einheit oder $p \mid u$. Beides widerspricht der Wahl von p $\lightning$ $\square$