Satz 5.3.2 (Einfache Eigenschaften von V)

stelle fest: ① und ② folgen direkt aus der Def.

zu ③ Erinnerung: $I_1 \cdot I_2 = (\underbrace{f_1 \cdot f_2}_{\in I_1 \cap I_2} \mid f_1 \in I_1, f_2 \in I_2)$

Also: $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \subseteq I_1$

$\overset{①}{\Rightarrow}$ $V(I_1 \cdot I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2) \supseteq V(I_1) \cup V(I_2)$

Jetzt zeige die anderen Inklusionen:

Sei: $\vec{a} \in V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow \forall f_1 \in I_1, f_2 \in I_2: f_1(\vec{a}) \cdot f_2(\vec{a}) = 0$

$\Rightarrow$ ――― " ――― $f_1(\vec{a}) = 0$ oder $f_2(\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow (\forall f_1 \in I_1 : f_1(\vec{a}) = 0)$ oder $(\forall f_2 \in I_2 : f_2(\vec{c}) = 0)$

$\Rightarrow \vec{a} \in V(I_1)$ oder $\vec{a} \in V(I_2)$

$\Rightarrow \vec{a} \in V(I_1) \cup V(I_2)$

zu ④ $V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \{ \vec{a} \mid \forall \lambda \in \Lambda : \forall f \in I_\lambda : f(\vec{a}) = 0 \}$

$= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda).$

$\square$