Satz 5.5.2 (Einfache Eigenschaften von I)

① folgt aus Definition

② Die Inklusion $A \subseteq V(I(A))$ ist tautologisch.

Interessant ist die Gleichheitsaussage.

Richtung 1 Wenn Gleichheit gilt, ist $A = V(I(A))$; wir hatten in §5.3 gesehen, dass $V(\text{Ideal})$ immer alg. sind.

Richtung 2 Ang. A wäre algebraisch, $A = V(f_1, \dots, f_n)$.

Klar:

$$A \subseteq V(I(A))$$

Also z.z.: $A \supseteq V(I(A)) \iff \mathbb{A}^m \setminus A \subseteq \mathbb{A}^m \setminus V(I(A))$.

Sei also $\vec{a} \notin A$. Das heißt: $\exists\, k: \; f_k(\vec{a}) \neq 0$.

Aber: $f_k \in I(A)$; also $\vec{a} \notin V(I(A))$

③ Es ist $I(A \cup B) = \{ f \in k[x_1 \dots x_m] \mid f|_A \equiv 0 \text{ und } f|_B \equiv 0 \}$

$$= \{ f \mid f|_A \equiv 0 \} \cap \{ f \mid f|_B \equiv 0 \}$$

$$= I(A) \cap I(B).$$

□