

Satz 5.6.3 Gegeben ein Ideal  $I$ , dann ist  $\text{rad } I$  wieder ein Ideal.

Muss zeigen:  $\underbrace{f, g \in \text{rad } I}_{\exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I, g^n \in I} \Rightarrow \underbrace{f+g \in \text{rad } I}_{\exists N \in \mathbb{N}: (f+g)^N \in I}$

Seien also  $f, g, n$  wie oben gegeben. Wähle  $N \gg 2 \cdot n$ .

Dann ist

$$(f+g)^N = \sum_{p=0}^N \binom{N}{p} \cdot f^p \cdot g^{N-p}.$$

Beobachtung: für alle  $p$  ist entweder  $\underbrace{p > n}_{\Rightarrow f^p \in I}$  oder  $\underbrace{N-p > n}_{g^{N-p} \in I}$

also liegt jeder Summand  $\binom{N}{p} \cdot f^p \cdot g^{N-p}$  in  $I$ , also liegt die Summe in  $I$ .  $\square$