Starker Nullstellensatz $\quad J = (f_1, \dots, f_m) \subset k[x_1, \dots, x_n] = k[\vec{x}]$

Ziel: Gg. $f \in I(V(J))$, dann $\exists N \in \mathbb{N} : f^N \in J$.

Trick von Robinovich: betr. $k[\vec{x}, y]$ und das Ideal $(J, y \cdot f - 1) =: J_1$

Frage: Was ist $V(J_1) \subset \mathbb{A}^{n+1}$

Antwort: wenn $\binom{\vec{x}}{y} \in V(J_1)$, dann $\underbrace{\forall g \in J: \; g(\vec{x}) = 0}_{\vec{x} \in V(J), \text{ also } f(\vec{x}) = 0}$ und $\underbrace{y \cdot f(\vec{x}) = 1}_{\text{ist nicht erfüllbar!}}$

Insgesamt $V(J_1) = \emptyset$

Schwacher Nullstellensatz: $1 \in J_1$. Also

$$1 = \sum_{i=1}^{m} g_i(\vec{x}, y) \cdot f_i(\vec{x}) + g_0(\vec{x}, y) \cdot (y \cdot f(\vec{x}) - 1) \in k[\vec{x}, y] \qquad (*)$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ die max. Potenz mit der y in den g_i auftritt. Mult. $(*)$ mit f^N

$$\Rightarrow \quad f^N = \sum_{i=1}^{m} G_i(\vec{x}, y \cdot f) \cdot f_i(\vec{x}) + G_0(\vec{x}, y \cdot f) \cdot (y \cdot f(\vec{x}) - 1) \in k[\vec{x}, y] \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \quad f^N = \sum_{i=1}^{m} G_i(\vec{x}, \underbrace{y \cdot f}_{= 1 \text{ in } k[\vec{x}, y]/(y \cdot f - 1)}) \cdot f_i(\vec{x}) + G_0(\vec{x}, y \cdot f) \cdot 0 \in k[\vec{x}, y]/(y \cdot f - 1)$$

$$\Rightarrow \quad f^N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} G_i(\vec{x}, 1) \cdot f_i(\vec{x}) \in k[\vec{x}, y]/(y \cdot f - 1). \qquad (***)$$

Beob 1: In der Gl. $(***)$ tritt kein y auf!

Beob 2: Die nat. Abb. $k[\vec{x}] \to k[\vec{x}, y]/(y \cdot f - 1)$ ist injektiv!

Also: wenn $(***)$ in $k[\vec{x}, y]/(y \cdot f - 1)$ gilt, dann auch in $k[\vec{x}]$

Also $\quad f^N(\vec{x}) = \sum G_i(\vec{x}, 1) \cdot f_i(\vec{x}) \in k[\vec{x}]$

$\Rightarrow \quad f^N \in J \qquad \square$