Beweis von Satz 6.1.3: Sei X irreduzibel, $J = I(X)$. Zu zeigen: J ist Primideal.

Seien also $f, g \in k[\vec{x}]$ s.d. $f \cdot g \in J$.

Betrachte die Ideale $J_f = (J, f)$ und $J_g = (J, g)$

Dann ist $J_f \supseteq J$ und $J_g \supseteq J$, also ist $X_f = V(J_f) \subseteq X$

und $X_g := V(J_g) \subseteq X$

Also: habe zwei alg. Teilmengen von X; also $X_f \cup X_g \subset X$.

Beh: es gilt sogar Gleichheit.

Beobachte: $$J_f \cdot J_g = (\underbrace{J^2}_{\subseteq J}, \underbrace{f \cdot J}_{\subseteq J}, \underbrace{g \cdot J}_{\subseteq J}, \underbrace{f \cdot g}_{\in J}) \subseteq J$$

Also $$X_f \cup X_g \underset{5.3.2}{=} V(J_f \cdot J_g) \supseteq V(J) = X.$$

irreduzibel

Insgesamt: $X_f \cup X_g = X$

$$\Rightarrow \underbrace{X_f = X}_{\Rightarrow f \in J} \quad \text{oder} \quad \underbrace{X_g = X}_{\Rightarrow g \in J}. \qquad \square$$