Beweis von Satz 6.1.3 Angenommen, $J = I(X)$ ist ein Primideal.

Muss zeigen: gegeben Vereinigung $X = X_1 \cup X_2$, dann ist dies keine echte Vereinigung.

OE $X_1 \not\supseteq X$; muss zeigen: dann ist $X_2 = X$ $(\Leftrightarrow X_2 \supseteq X)$.

Weil $X_1 \not\supseteq X$ ist $I(X_1) \not\subseteq I(X)$. Wähle $f \in I(X_1) \setminus I(X)$.

Beob: Wenn $g \in I(X_2)$ gegeben ist, dann

$$f \cdot g \in I(X_1) \cdot I(X_2) \subseteq I(X_1) \cap I(X_2) = I(X_1 \cup X_2) = I(X).$$

Also: $f \cdot g \in J$, $f \notin J \underset{J \text{ prim}}{\Rightarrow} g \in J$.

Zusammenfass: $I(X_2) \subseteq I(X) = J \Rightarrow \underbrace{V(I(X_2))}_{= X_2} \supseteq X$. $\square$