Beweis von Satz 6.2.3: Eindeutigkeit: Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ eine alg. Menge und sei

$X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine Zerlegung wie im Satz 6.2.3.

Betr. $M = \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal } \mathfrak{p} \supseteq I(X) \}$.

Beh Die Primideale $I(X_i)$ sind exakt die minimalen Elts von M

Konsequenz die $I(X_i)$ sind eindeutig, Beweis fertig.

muss zeigen: (1) $\mathfrak{p}$ minimal $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ ist eines der $I(X_i)$

(2) $I(X_i)$ sind minimal.

Beweis von (1) sei $\mathfrak{p} \in M$ minimal. Nach Lem. 6.2.6: $\exists i$: $\mathfrak{p} \supseteq I(X_i) \supseteq I(X)$

Wegen Minimalität von $\mathfrak{p}$ folgt: $\mathfrak{p} = I(X_i)$.

Beweis von (2) Sei Index i gegeben, sei ein Primideal $\mathfrak{p}$ gegeben, s.d.

$I(X_i) \supseteq \mathfrak{p} \supseteq I(X)$. Nach Lemma 6.2.6: $\exists j$:

$I(X_i) \supseteq \mathfrak{p} \supseteq I(X_j) \supseteq I(X)$

Die Bedingung $X_i \not\subseteq X_j$ für $i \neq j$. erzwingt: $i = j$, also

$I(X_i) \supseteq \mathfrak{p} \supseteq I(X_i)$, also $I(X_i) = \mathfrak{p}$. $\square$