Beweis von Satz 8.4.1 : Existenz einer Zerlegung

$\mathfrak{F} := \{ f \in F \mid f$ hat keine Darstellung $\}$.

Ziel: $\mathfrak{F} = \emptyset$. Widerspruchsbeweis: ang. $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Beobachtung Gegeben $f \in \mathfrak{F}$, dann hat f mindestens einen Term, der Vielfaches eins der $in(f_\circ)$, denn sonst wäre $f = \sum 0 \cdot f_i + f$ eine Darst.

Also

$\mathcal{M} = \{ M$ ein Monom $\mid \exists f \in \mathfrak{F}, c \in k^*: c \cdot M$ ist unter den Termen von f, die Vielfaches eines der $in(f_\circ)$ sind, der größte $\}$.

$\neq \emptyset$.

Erinnerung. Monomord. waren Wohlordnungen, also enthält $\mathcal{M}$ ein kleinstes Element.

Sei also $M \in \mathcal{M}$ das kleinste, sei $f \in \mathfrak{F}$ ein zugehöriges Elt.

$$i := \min \{ j \mid in(f_j) \text{ teilt } M \}.$$

$$g_i' := \frac{c \cdot M}{in(f_i)} \in k[x_1, \dots, x_n]$$

$$f' := f - g_i' \cdot f_i$$

Beobachtung: Falls kein Term von f' Vielfaches von einem der $in(f_\circ)$ ist, dann ist $f = g_i' \cdot f_i + f'$ eine Darstellung ↯

Also gibt es Terme von f', die Vielfaches von einem der $in(f_\circ)$ sind.

Beob per Konstruktion sind diese Terme ~~aber~~ aber all kleiner als M.

Also: $f' \notin \mathfrak{F}$. Also hat f' eine Darstellung

$$f' = g_1 f_1 + \dots + g_i'' \cdot f_i + \dots + g_m \cdot f_m + h.$$

Dann ist

$$f = g_1 \cdot f_1 + \dots + (g_i' + g_i'') \cdot f_i + \dots + g_m \cdot f_m + h$$

eine Darstellung von f, die es per Annahme nicht geben kann ↯ $\square$